物理競試解答

1. ∵ $\dfrac{GM_e m}{R_e^2}$ 為地球上萬有引力，當体積變為 $\frac{1}{8}$，半徑變為 $\frac{1}{2}$，質量變為 $\frac{1}{8}$

∴ $\dfrac{GM_e(\frac{1}{8})}{(\frac{1}{2})^2 R_e^2} m = \dfrac{1}{2}\dfrac{GM_e}{R_e^2} m$ ∴ Ans: $\frac{1}{2}$ (C)

2. 由動量守恒知：

$m_1\dot{x}_1 = m_2\dot{x}_2$ —①

系統總機械能

$E = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1+x_2)^2$

但 $\dfrac{dE}{dt}=0$ ∴ $m_1\dot{x}_1\ddot{x}_1 + m_2\dot{x}_2\ddot{x}_2 + k(x_1+x_2)(\dot{x}_1+\dot{x}_2) = 0$ —②

合併①與② ∴ $(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2) + \dfrac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}(x_1+x_2) = 0$

令 $x_1+x_2 = x$ ∴ $\ddot{x} + \dfrac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}x = 0$

$\omega = \sqrt{\dfrac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}$, $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{k(m_1+m_2)}}$ ∴ Ans: (A)

3. 在相同 I_{CM} 之條件下，實心球之 MR^2 最大，故其運動慣性最小，會最先到達斜坡底部。 Ans: (A)

4. ∵ $\dfrac{T^2}{R^3} = \text{const}$, $\dfrac{1}{R^3} = \dfrac{T^2}{(1.52R)^3}$ ∴ $T = 1.87$ 年 Ans: (D)

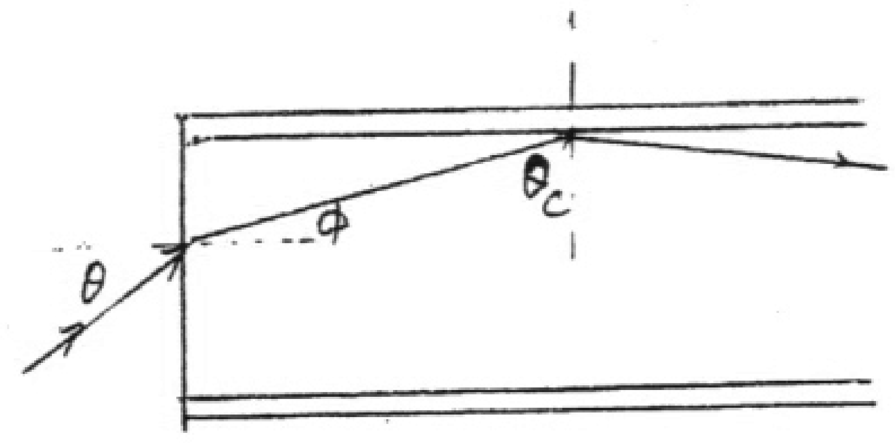
5. 設 a 點的溫度為 T，因為熱平衡

$80 - T = (T-20) + (T-20)$ ∴ $T = 40^\circ C$ Ans: (B)

6. ∵ $R = \rho\dfrac{l}{A}$ ∴ $0.1 = 1.69\times10^{-8}\dfrac{20}{\pi R^2}$, $R = 1.037$ mm

∴ 直徑 $= 2R = 2.08$ Ans: (C)

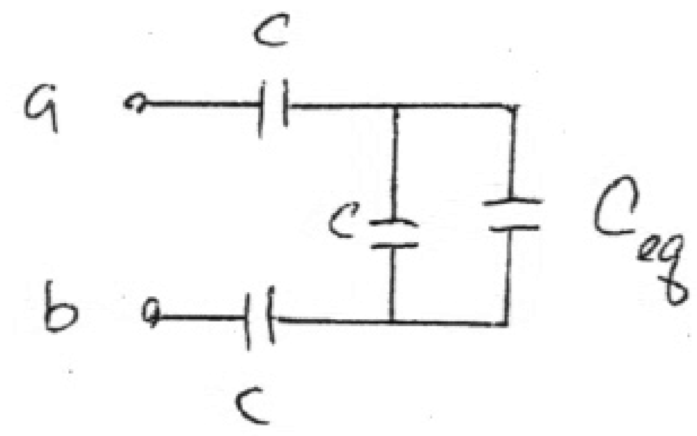
7. $\sin\theta_c = \dfrac{1.2}{1.3}$ $\quad\therefore \cos\theta_c = \dfrac{5}{13}$



又 $\theta_c + \phi = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad\therefore \sin\phi = \cos\theta_c = \dfrac{5}{13}$

根據折射定律 $1\cdot\sin\theta = 1.3\sin\phi$. $\therefore \sin\theta = \dfrac{1}{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ Ans: (D)

8. $C_{eq} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C+C_{eq}} + \dfrac{1}{C}}$



$2C_{eq}^2 + 2C\cdot C_{eq} - C^2 = 0$ $\quad\therefore C_{eq} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}C$ Ans: (B)

計算題:

1. (1) 上升時, $v>0$. $\quad m\dfrac{dv}{dt} = -mg - mkv^2$. $(k>0) \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = -g - kv^2$

(2) 下降時 $v<0$. $\quad m\dfrac{dv}{dt} = -mg + mkv^2$ $\quad (k>0) \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = -g + kv^2$ $\Big\}$ (a)

$\because \dfrac{dz}{dt} = v$ $\quad\therefore \dfrac{dv}{dz} = \dfrac{dv}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dz} = -\dfrac{g+kv^2}{v}$ ‥ 上升時 ①

同理 $\dfrac{dv}{dz} = -\dfrac{g-kv^2}{v}$ .... 下降時 $\Big\}$ (b)

(3) 利用①式 $h - 0 = -\displaystyle\int_{v_0}^{0} \dfrac{v}{g+kv^2}\,dv = \dfrac{1}{2k}\left[\ln\left|v^2 + \dfrac{g}{k}\right|\right]\Big|_0^{v_0}$

$\therefore h = \dfrac{1}{2k}\ln\left|1 + \dfrac{k}{g}v_0^2\right|$ .... (c)

2. (I) 依據碰撞時, 動量守恆及動能守恆. 令碰撞後 A, B 速度分別為 V_A', V_B'

則 $\begin{cases} mV + M\cdot 0 = mV_A' + MV_B' \\ \dfrac{V_A' - V_B'}{V - 0} = -1 \end{cases}$ $\quad\therefore \left.\begin{aligned} V_A' &= \dfrac{m-M}{m+M}V \\ V_B' &= \dfrac{2mV}{m+M} \end{aligned}\right\}$ (a)

(b) $M/m=2$ 時.

A之運動方程式為 $\frac{d^2x}{dt^2}=0$. $x=C_1t+C_2$ (C_1, C_2 為常數)

初始條件 $x(0)=0$. $\dot{x}(0)=\frac{m-2m}{m+2m}V=-\frac{V}{3}$ ∴ $C_2=0$, $C_1=-\frac{V}{3}$

∴ $x=-\frac{V}{3}t$

B之運動方程式為 $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{M}x$, $\omega_B=\sqrt{\frac{k}{M}}$

$$x=Ae^{i\omega_B t}+Be^{-i\omega_B t}$$

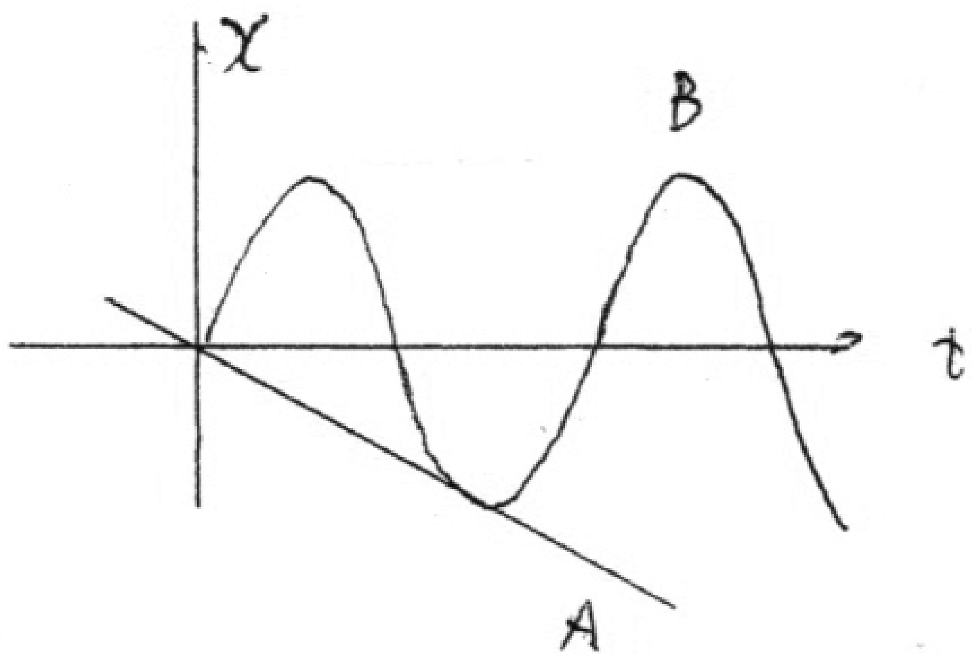
初始條件 $x(0)=0$. $\dot{x}(0)=\frac{2mV}{m+2M}=\frac{2}{3}V$.

∴ $\begin{cases} A+B=0 \\ i\omega_B(A-B)=\frac{2}{3}V \end{cases}$ ∴ $A=\frac{1}{2i\omega_B}\frac{2V}{3}=-B$.

∴ $x=\frac{2}{3}V\frac{1}{2i\omega_B}\left(e^{i\omega_B t}-e^{-i\omega_B t}\right)=\frac{2V}{3}\sqrt{\frac{M}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)$

∴

Ans:



(c) 完全非彈性碰撞則

$\begin{cases} mV+M\cdot 0=(m+M)V_A' \\ \frac{V_A'-V_B'}{V-0}=0 \end{cases}$ ∴ $V_A'=V_B'=\frac{mV}{m+M}$

運動方程式: $(m+M)\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$

初始條件 $x(0)=0$. $\dot{x}(0)=\frac{mV}{m+M}$ 代入解得

$x=\frac{mV}{\sqrt{k(m+M)}}\sin\sqrt{\frac{k}{m+M}}t$, 回來時間 $=\frac{T}{2}$

$=\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}$ ※ Ans

3.

(a) 求各階段所作的功.

a→b. 等溫膨脹: $W_{a\to b}=\int_{V_1}^{V_2}p\,dV=nRT_1\ln\frac{V_2}{V_1}$

$Q_{a\to b}=W_{a\to b}=nRT_1\ln\frac{V_2}{V_1}$

b→c 等容加壓: $W_{b\to c}=0$

$Q_{b\to c}=nC_v(T_2-T_1)$

c→d 等溫壓縮: $W_{c\to d}=nRT_2\ln\frac{V_2}{V_1}$

$Q_{c\to d}=nRT_2\ln\frac{V_1}{V_2}$

d→a. 等容減壓: $W_{d\to a}=0$.

$Q_{d\to a}=nC_v(T_1-T_2)$

(b) 每個循環所排放的熱量 Q

$$Q = nRT_2 \ln\frac{V_2}{V_1} + nC_v(T_2 - T_1)$$

每個循環輸入的功 W

$$W = nRT_2 \ln\frac{V_2}{V_1} - nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = nR(T_2 - T_1)\ln\frac{V_2}{V_1}$$

∴ 性能係數 $p = \frac{Q}{W} = \frac{nRT_2 \ln\frac{V_2}{V_1} + nC_v(T_2-T_1)}{nR(T_2-T_1)\ln\frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_2}{T_2-T_1} + \frac{C_v}{R}\left(\ln\frac{V_2}{V_1}\right)^{-1}$ ※ Ans

4. 考慮以 O 為中心半徑為 r 的封閉曲面 S，利用高斯定律

球外側的總電荷量為 0，因此球內電量為 r 之函數 ∴

$$Q(r) = \begin{cases} 0 & r > a \\ (1-\frac{r^3}{R^3})Q & r < a \end{cases}$$

依照高斯定律 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

∴ 電場 E 為

$$E = \begin{cases} 0 & r > a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}(1-\frac{r^3}{a^3}) & r < a \end{cases}$$ ------ (a) Ans.

而電位：當 $r>a$ 時，$\phi = \int_r^\infty 0\,dr = 0$

$r<a$ 時，$\phi = \int_r^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}(1-\frac{r^3}{a^3})dr + \int_a^\infty 0\,dr$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_r^a \frac{1}{r^2}dr + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3}\int_r^a r\,dr$$

$$= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{r} - \frac{3}{a} + \frac{r^2}{a^3}\right)$$

結果
$$\phi = \begin{cases} 0 & r > a \\ \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{r} - \frac{3}{a} + \frac{r^2}{a^3}\right) & r < a \end{cases}$$ ------ (b) Ans.